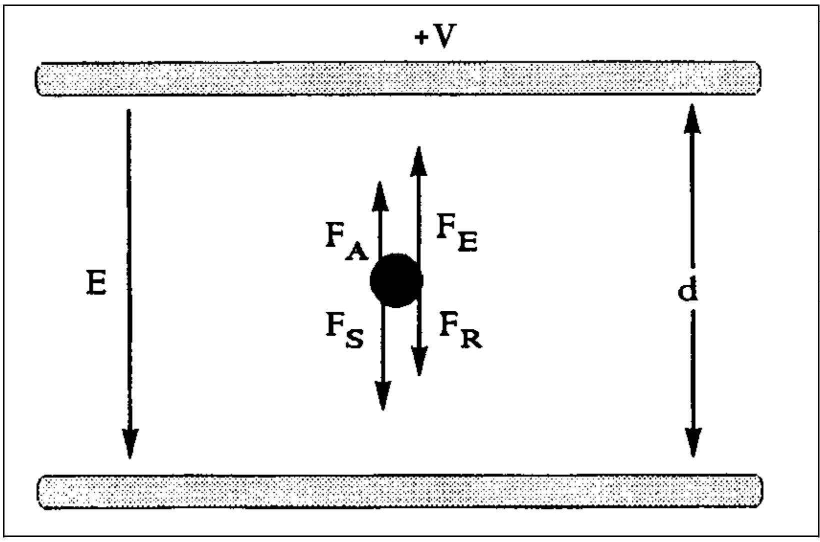
Dennis Fischer
Magdalena Boeddinghaus

Gruppe 9
28.10.04

Versuch Nr. 5: Bestimmung der Elementarladung nach Millikan

1. Theorie zum Versuchs

Bei der Öltröpfchenmethode nach Millikan wird Öl mittels eines Zerstäubers in winzige Tropfen aufgeteilt. Die Öltröpfchen werden durch einen α-Strahler (^{238}Pu) ionisiert, indem der Strahler Luftmoleküle (O_2^+, O_2^{2+}, e^- etc.) stoßionisiert, welche sich dann an die Öltröpfchen anlagern. Je nachdem welche Ladung sich anlagert, entsteht als Summe der Ladungen eine positive oder negative Ladung auf den Öltröpfchen.
Öltröpfchen werden zwischen die Platten (mit dem Abstand d) eines Plattenkondensators gebracht. Solange kein elektrisches Feld angelegt ist, fallen die Tröpfchen durch die Schwerkraft nach unten. Die durch das von schräg hinten einfallende Licht beleuchteten Öltröpfchen werden durch ein astronomisches Fernrohr beobachtet. In der Okular des Fernrohres ist zur Vermessung der zurückgelegten Wegstrecke eine Strichplatte eingebaut.
Legt man eine Spannung an die Platten an, kann man die Bewegungsrichtung der Öltröpfchen aufgrund ihrer Ladung ändern:



Auf ein solches geladenes Tröpfchen wirkt nun die Schwerkraft F_S, die elektrische Kraft F_E, die Auftriebskraft F_A und die Stokessche Reibungskraft F_R

Die einzelnen Gleichungen für die Kräfte lauten:

Reibungskraft $\overrightarrow{F_R} = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot \overrightarrow{v}$

Auftriebskraft $\overrightarrow{F_A} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho_{Luft} \cdot \overrightarrow{g}$

Schwerkraft $\overrightarrow{F_s} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho_{Öl} \cdot \overrightarrow{g}$

Elektrische Kraft $\overrightarrow{F_E} = q \cdot \overrightarrow{E}$

Die Auftriebskraft wird mit der Schwerkraft zusammengefasst ($F_S > F_A$), da beide immer wirken, so dass man nur noch drei bestimmende Kräfte hat.
Ausschlaggebend für die Bewegungsrichtung der Tropfen ist die Elektrische Kraft F_E. Also bestimmt sie die Bewegungsrichtung. Der Bewegung entgegengesetzt wirkt die Stokessche Reibungskraft F_R. Somit folgt:

Aufwärtsbewegung: $F_S \downarrow F_R \downarrow F_E \uparrow$ also insgesamt ↑

Abwärtsbewegung: $F_S \downarrow F_R \uparrow F_E \downarrow$ also insgesamt ↓

Dabei ist jedoch die Fallbewegung schneller als die Aufwärtsbewegung, da nach unten F_S zusammen mit F_E wirkt.

3. Versuchsaufbau und Durchführung

Leider konnte dieser Versuch nicht durchgeführt werden, da der Apparat kaputt war.

4. Auswertung

Aus den uns zur Verfügung gestellten Werten wurde nur die Werte für die Berechnung gewertet, deren Verhältnis nahe genug bei 1,5 : 1 lag.

Nr	U	t auf	t ab	v auf	v ab	v ab/v auf
1	167	8,9	5,7	9,7753E-005	1,5263E-004	1,5614
2	101	17,53	11,09	4,9629E-005	7,8449E-005	1,5807
3	220	10,9	6,7	7,9817E-005	1,2985E-004	1,6269
4	220	10,1	6,7	8,6139E-005	1,2985E-004	1,5075
5	220	11	6,8	7,9091E-005	1,2794E-004	1,6176
6	220	10,2	6,5	8,5294E-005	1,3385E-004	1,5692
7	151	12,01	8,61	7,2440E-005	1,0105E-004	1,3949
8	151	10,87	7,72	8,0037E-005	1,1269E-004	1,4080
9	194	6,44	4,42	1,3509E-004	1,9683E-004	1,4570
10	194	11,16	7,72	7,7957E-005	1,1269E-004	1,4456
11	219	8,7	6,3	1,0000E-004	1,3810E-004	1,3810
12	219	9	6,4	9,6667E-005	1,3594E-004	1,4063

Die von den Tröpfchen zurückgelegte Strecke ist $0,87 \pm 0,0145 mm$ ($\triangleq 8,7 \cdot 10^{-4} \pm 1,45 \cdot 10^{-5} m$) lang.

Die weiteren Werte : Raumtemperatur $293 \pm 1K$
Luftdruck $760 \pm 1 Torr$
Relative Luftfeuchtigkeit 50%

Diese Werte sind angenommen. Die originalen Werte sind nicht bekannt, da der Versuch nicht selbst durchgeführt wurde. Es wird jedoch mit diesen Werten der Rechenweg aufgezeigt.

Zunächst soll der Radius der Tröpfchen berechnet werden. Dies geschieht nach der Formel

$$r = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\eta \cdot (v_{ab} - v_{auf})}{\left(\rho_{Öl} - \rho_{Luft}\right) \cdot g}}$$

Dabei ist η die Viskosität der Luft, ρ die Dichte und g die Erdbeschleunigung.

Um die Variablen berechnen zu können, muss man zunächst die Partialdrücke der einzelnen Komponenten der Luft berechnen.

Die Partialdrücke erhält man aus der Multiplikation des Anteils des Gases in der Luft und dem korrigierten Luftdruck, dem der Anteil an Wasser abgezogen wurde.

Sättigungsdampfdruck des Wassers: 18,6 Torr

Partialdruck des Wasser: $18,6 Torr \cdot 0,5 = 9,3 Torr$

Korrigierter Luftdruck: $760 Torr - 9,3 Torr = 750,70 Torr$

Partialdruck: $p_i = Anteil \cdot 750,70 Torr$ $\Delta p_i = \pm\sqrt{(Anteil \cdot \Delta p_L)^2}$

Die Drücke werden für die Gase O_2, N_2 und Ar berechnet. Weitere Gase wurden aufgrund ihres niedrigen Anteils vernachlässigt.

Weiterhin werden die Konzentration, die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$, die Teilchendichte N und die mittlere freie Weglänge λ für diese Gase berechnet. Die Werte für den Stoßquerschnitt σ sind der Literatur entnommen.

$$c_i = \frac{p_i}{p_L \cdot 24,123 l \cdot mol^{-1}} \qquad \Delta c_i = \sqrt{\left(\frac{\Delta p_i}{p_L \cdot 24,123 l \cdot mol^{-1}}\right)^2 + \left(\frac{p_i \cdot \Delta p_L}{p_l^2 \cdot 24,123 l \cdot mol^{-1}}\right)^2}$$

$$\rho_i = c_i \cdot M_i \qquad \Delta \rho_i = \pm\sqrt{(M_i \cdot \Delta c_i)^2}$$

$$\overline{v_i} = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi \cdot M_i}} \qquad \Delta \overline{v_i} = \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta T \cdot 8 \cdot R}{2 \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi \cdot M_i}}}\right)^2}$$

$$N = \frac{p_L}{kT} \qquad \Delta N = \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta p_L}{k \cdot T}\right)^2 + \left(-\frac{p_L \cdot \Delta T}{k \cdot T^2}\right)^2}$$

$$\lambda_i = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma_i \cdot N} \qquad \Delta \lambda_i = \pm\sqrt{\left(\frac{-\Delta N}{\sqrt{2} \cdot \sigma \cdot N^2}\right)^2}$$

Für die Teilchendichte ergibt sich: $N = 2,5047\text{E+}25 m^{-3}$ und $\Delta N = 7,2432\text{E+}22 m^{-3}$

Die Werte sind in dieser Tabelle zusammengestellt:

	O_2	N_2	Ar	H_2O
Anteil	0,2095	0,7809	0,0093	
$M_i\ [g \cdot mol^{-1}]$	31,9988	28,0134	39,9480	18,0152
$p_i\ [Torr]$	157,2717	586,2216	6,9815	9,3000
Δp_i	0,2095	0,7809	0,0093	0,5000*
$c_i\ [mol \cdot l^{-1}]$	8,5784E-03	3,1975E-02	3,8081E-04	5,0727E-04
Δc_i	1,6062E-05	5,9870E-05	7,1301E-07	6,6746E-07
$\rho_i\ [kg \cdot m^{-3}]$	0,2745	0,8957	1,5212E-02	9,1385E-03
$\Delta \rho_i$	5,1396E-04	1,6772E-03	2,8483E-05	1,2024E-05
$\overline{v_i}\ [m \cdot s^{-1}]$	435,6114	465,5680	389,8689	580,5597
$\Delta \overline{v_i}$	0,7594	0,8117	0,6797	1,0121
$\sigma_i\ [nm^2]$	0,4100	0,4500	0,4200	0,6600
$\lambda_i\ [m]$	6,8856E-08	6,2735E-08	6,7216E-08	4,2774E-08
$\Delta \lambda_i$	1,9912E-10	1,8142E-10	1,9438E-10	1,2369E-10

*Δp_{H_2O} wurde mit 0,5 angenommen.

Für die Luft gilt:

Dichte: $\rho_L = \sum_i \rho_i$ $\qquad \Delta \rho_L = \pm \sqrt{\sum_i (\Delta \rho_i)^2}$

mittlere Geschwindigkeit: $\overline{v_L} = \sum_i \frac{p_i}{p_L} \cdot \overline{v_i}$ $\qquad \Delta \overline{v_L} = \sqrt{\frac{\sum_i (\overline{v}_i^2 \cdot \Delta p_i^2 + p_i^2 \cdot \Delta \overline{v}_i^2)}{p_L^2}}$

mittlere freie Weglänge: $\lambda_L = \sum_i \frac{p_i}{p_L} \cdot \lambda_i$ $\qquad \Delta \lambda_L = \sqrt{\frac{\sum_i (\lambda_i^2 \cdot \Delta p_i^2 + p_i^2 \cdot \Delta \lambda_i^2)}{p_L^2}}$

Viskosität: $\eta = \frac{\rho_L \cdot \lambda_L \cdot \overline{v_L}}{2}$

$$\Delta \eta = \sqrt{\left(\frac{\rho_L \cdot \overline{v_L} \cdot \Delta \lambda_L}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho_L \cdot \lambda_L \cdot \Delta \overline{v_L}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_L \cdot \overline{v_L} \cdot \Delta \rho_L}{2}\right)^2}$$

Die Werte für die Luft:

		Δ
$\rho_L\ [kg \cdot m^{-3}]$	1,1946	1,8219E-03
$\overline{v_L}\ [m \cdot s^{-1}]$	459,9427	0,8978
$\lambda_L\ [m]$	6,3780E-08	1,6307E-10
$\eta\ [kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$	1,7522E-05	6,2377E-08

Die Dichte des Öls beträgt 881 $kg \cdot m^{-3}$

Nun kann man die Radien berechnen.

Für den Fehler von r ergibt sich:

$$\Delta r = \sqrt{\left(\frac{3}{4\cdot(\rho_{Öl}-\rho_L)\cdot g\cdot\sqrt{\frac{\eta\cdot(v_{ab}-v_{auf})}{(\rho_{Öl}-\rho_L)\cdot g}}}\right)^2 \cdot \left(\eta^2\cdot\Delta v_{ab}^2+\eta^2\cdot\Delta v_{auf}^2+(v_{ab}-v_{auf})^2\Delta\eta^2+\frac{\eta^2\cdot(v_{ab}-v_{auf})^2\cdot\Delta\rho_L}{(\rho_{Öl}-\rho_L)}\right)}$$

Für die Tröpfchen liefert dies folgende Werte:

Nr.	v_{ab} $[m\cdot s^{-1}]$	Δv_{ab}	v_{auf} $[m\cdot s^{-1}]$	Δv_{auf}	r $[m]$	Δr
1	1,5263E-04	8,4264E-06	9,7753E-05	3,6758E-06	5,0067E-07	4,1945E-08
2	7,8449E-05	2,4926E-06	4,9629E-05	1,1856E-06	3,6283E-07	1,7385E-08
3	1,2985E-04	6,2039E-06	7,9817E-05	2,5682E-06	4,7806E-07	3,2088E-08
4	1,2985E-04	6,2039E-06	8,6139E-05	2,9338E-06	4,4684E-07	3,5084E-08
5	1,2794E-04	6,0338E-06	7,9091E-05	2,5279E-06	4,7237E-07	3,1640E-08
6	1,3385E-04	6,5680E-06	8,5294E-05	2,8834E-06	4,7093E-07	3,4796E-08
7	1,0105E-04	3,9028E-06	7,2440E-05	2,1753E-06	3,6147E-07	2,8237E-08
8	1,1269E-04	4,7651E-06	8,0037E-05	2,5805E-06	3,8623E-07	3,2051E-08
9	1,9683E-04	1,3757E-05	1,3509E-04	6,6838E-06	5,3105E-07	6,5783E-08
10	1,1269E-04	4,7651E-06	7,7957E-05	2,4657E-06	3,9834E-07	3,0769E-08
11	1,3810E-04	6,9671E-06	1,0000E-04	3,8299E-06	4,1715E-07	4,3534E-08
12	1,3594E-04	6,7629E-06	9,6667E-05	3,6026E-06	4,2353E-07	4,1326E-08

Zwischen den Radien der Tröpfchen und der mittleren freien Weglänge liegt noch nicht mal eine Zehnerpotenz. Die Bedingung von einem kontinuierlichen Medium ist hier nicht gegeben. Daher muss die Viskosität korrigiert werden. Man macht dies mit der Cunningham-Korrektur.

$$\eta_C = \eta\left(1+A\cdot\frac{\lambda}{r}\right)^{-1} \qquad \Delta\eta_C = \sqrt{\left(\frac{\Delta\eta}{1+A\cdot\frac{\lambda}{r}}\right)^2+\left(\frac{-\eta\cdot A\cdot\Delta\lambda}{r\cdot\left(1+A\cdot\frac{\lambda}{r}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{\eta\cdot A\cdot\lambda\cdot\Delta r}{r^2\cdot\left(1+A\cdot\frac{\lambda}{r}\right)^2}\right)^2}$$

Dabei ist A eine Konstante und hat den Wert 0,864.

Als nächstes soll die Elementarladung q der Tröpfchen berechnet werden.

$$q = \frac{9\cdot\pi}{2\cdot E}\cdot\sqrt{\frac{\eta^3\cdot(v_{ab}-v_{auf})}{(\rho_{Öl}-\rho_L)\cdot g}}\cdot(v_{ab}+v_{auf}) \text{ mit}$$

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial E}\right)^2\cdot\Delta E^2+\left(\frac{\partial q}{\partial v_{ab}}\right)^2\cdot\Delta v_{ab}^2+\left(\frac{\partial q}{\partial v_{auf}}\right)^2\cdot\Delta v_{auf}^2+\left(\frac{\partial q}{\partial\eta}\right)^2\cdot\Delta\eta^2+\left(\frac{\partial q}{\partial\rho_L}\right)^2\cdot\Delta\rho_L^2} \text{ und es gilt}$$

$$\frac{\partial q}{\partial E} = -\frac{9 \cdot \pi}{2 \cdot E^2} \cdot \sqrt{\frac{\eta^3 \cdot (v_{ab} - v_{auf})}{(\rho_{Öl} - \rho_L) \cdot g}} \cdot (v_{ab} + v_{auf})$$

$$\frac{\partial q}{\partial v_{ab}} = \frac{9 \cdot \pi}{2 \cdot E} \cdot \left(\frac{\eta^3 \cdot (v_{ab} + v_{auf})}{2 \cdot (\rho_{Öl} - \rho_L) \cdot g \sqrt{\frac{\eta^3 \cdot (v_{ab} - v_{auf})}{(\rho_{Öl} - \rho_L) \cdot g}}} + \sqrt{\frac{\eta^3 \cdot (v_{ab} - v_{auf})}{(\rho_{Öl} - \rho_L) \cdot g}} \right)$$

$$\frac{\partial q}{\partial v_{auf}} = \frac{9 \cdot \pi}{2 \cdot E} \cdot \left(\frac{-\eta^3 \cdot (v_{ab} + v_{auf})}{2 \cdot (\rho_{Öl} - \rho_L) \cdot g \sqrt{\frac{\eta^3 \cdot (v_{ab} - v_{auf})}{(\rho_{Öl} - \rho_L) \cdot g}}} + \sqrt{\frac{\eta^3 \cdot (v_{ab} - v_{auf})}{(\rho_{Öl} - \rho_L) \cdot g}} \right)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \eta} = \frac{9 \cdot \pi}{2 \cdot E} \cdot \frac{3 \cdot \eta^2 \cdot (v_{ab}^2 - v_{auf}^2)}{2 \cdot (\rho_{Öl} - \rho_L) \cdot g \sqrt{\frac{\eta^3 \cdot (v_{ab} - v_{auf})}{(\rho_{Öl} - \rho_L) \cdot g}}}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \rho_L} = \frac{9 \cdot \pi}{2 \cdot E} \cdot \frac{\eta^3 \cdot (v_{ab}^2 - v_{auf}^2)}{2 \cdot (\rho_{Öl} - \rho_L)^2 \cdot g \sqrt{\frac{\eta^3 \cdot (v_{ab} - v_{auf})}{(\rho_{Öl} - \rho_L) \cdot g}}}$$

Da hier die Spannung gewechselt hat, muss die Feldstärke E jeweils noch berechnet werden.

$E = \frac{U}{d}$ $\qquad \Delta E = \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{d}\right)^2 + \left(-\frac{U \cdot \Delta d}{d^2}\right)^2}$ $\qquad$ mit $d = 2,5mm \pm 0,01$ Plattenabstand

Daraus ergeben sich folgende Werte:

Nr.	$\eta_C [kg \cdot m^{-1} \cdot s^1]$	$\Delta\eta_c$	$E\ [V \cdot m^{-1}]$	ΔE	$q\ [C]$	Δq
1	1,5784E-05	5,3760E-08	6,6800E+04	8,4344E+02	2,6498E-19	3,2235E-20
2	1,5211E-05	5,1915E-08	4,0400E+04	8,1616E+02	1,5365E-19	1,1233E-20
3	1,5711E-05	5,3521E-08	8,8000E+04	8,7402E+02	1,5970E-19	1,6008E-20
4	1,5598E-05	5,3157E-08	8,8000E+04	8,7402E+02	1,5212E-19	1,6926E-20
5	1,5691E-05	5,3458E-08	8,8000E+04	8,7402E+02	1,5553E-19	1,5503E-20
6	1,5686E-05	5,3442E-08	8,8000E+04	8,7402E+02	1,6404E-19	1,7657E-20
7	1,5204E-05	5,1891E-08	6,0400E+04	8,3569E+02	1,3859E-19	1,4595E-20
8	1,5334E-05	5,2307E-08	6,0400E+04	8,3569E+02	1,6662E-19	1,8738E-20
9	1,5874E-05	5,4052E-08	7,7600E+04	8,5811E+02	3,2348E-19	5,5208E-20
10	1,5392E-05	5,2495E-08	7,7600E+04	8,5811E+02	1,3307E-19	1,1472E-20
11	1,5477E-05	5,2768E-08	8,7600E+04	8,7337E+02	1,5544E-19	2,1533E-20
12	1,5504E-05	5,2855E-08	8,7600E+04	8,7337E+02	1,5458E-19	2,0303E-20

Im Durchschnitt beträgt die Elementarladung $1,7682 \cdot 10^{-19} \pm 2,1176 \cdot 10^{-20} C$. Dieser Wert weicht um 10% ab vom Literaturwert 1,602 C. Jedoch liegt der Literaturwert noch innerhalb der Fehlergrenzen.

Der Literaturwert lässt sich auch mittels spektroskopisch zugänglichen Größen berechnen:

Die Elementarladung e kann auch berechnet werden aus spektroskopisch zugänglichen Größen:

$$e = \frac{\alpha}{\mu_0 \cdot \frac{c}{4} \cdot \frac{2 \cdot e}{h}}$$

mit $\mu_0 = 12{,}5663706 \cdot 10^{-7}$ N/A²

$2e/h = 4{,}8359767 \cdot 10^{14}$ Hz/V (Josephson-Konstante)

c = 299792458 m/s

$\alpha = 7{,}29735308 \cdot 10^{-3}$ (Feinstrukturkonstante)

$$e = \frac{7,29735308 \cdot 10^{-3}}{12,5663706 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{299792458}{4} \cdot 4,8359767 \cdot 10^{14}} \frac{1}{\frac{N}{A^2} \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{Hz}{V}}$$

$$= 1,60217734 \cdot 10^{-19} \frac{1}{\frac{J \cdot s^{-1}}{J \cdot s^{-1} \cdot C}} = 1,60217734 \cdot 10^{-19} C$$

5. Diskussion der Ergebnisse

Sowohl Temperatur wie auch Luftdruck und Luftfeuchtigkeit haben einen Einfluss auf die Viskosität. Die Temperatur fließt in die Berechnung der mittleren Geschwindigkeit und der Teilchendichte. Der Luftdruck und die Luftfeuchtigkeit haben Einfluss auf die Partialdrücke. Diese fließen in die Berechnung der einzelnen Faktoren der Viskosität mit ein. Die mittlere freie Weglänge findet sich auch in der Cunningham-Korrektur wieder.

Bei der Berechnung sind für die Molmasse und den Stoßquerschnitt Werte aus der Literatur übernommen worden. Für die Berechnung wurden deren Fehler mit 0 angenommen.